



XXI ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ



ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД, 2014 год

XXI Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап, Великий Новгород, 2014 г. Условия и решения задач. Под редакцией А.С. Расторгуева, О.С. Угольникова, А.М. Татарникова, Е.Н. Фадеева. 36 стр.

Оригинал-макет и верстка: О.С. Угольников.



X. 1

ЭКВАТОР, ТРОПИК И ПОЛЯРНЫЙ КРУГ

О.С. Угольников

? На некоторой планете сферической формы длины экватора и тропика относятся так же, как и длины тропика и полярного круга. Определите максимально возможную высоту одиночной центральной звезды на полярном круге. Угловыми размерами центральной звезды и рефракцией пренебречь.

! Широты тропика и полярного круга по модулю составляют

$$\varphi_1 = \varepsilon; \quad \varphi_2 = 90^\circ - \varepsilon.$$

Здесь ε – угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты планеты. Если длину окружности экватора обозначить через L_0 , то длины окружности тропика и полярного круга будут равны

$$\begin{aligned} L_1 &= L_0 \cos \varphi_1 = L_0 \cos \varepsilon, \\ L_2 &= L_0 \cos \varphi_2 = L_0 \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Из условия задачи

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{L_1}{L_2}; \quad \frac{1}{\cos \varepsilon} = \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}.$$

Данная пропорция может быть переписана как $1 - \sin^2 \varepsilon = \sin \varepsilon$. Квадратное уравнение имеет один корень на интервале $[0..1]$:

$$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618; \quad \varepsilon = 38^\circ.$$

Высота центральной звезды на полярном круге будет максимальной в день солнцестояния (летнего для данного полушария) и составит

$$h = 90^\circ - \varphi_2 + \varepsilon = 2\varepsilon = 76^\circ.$$

X. 2

АПРЕЛЬ 2014

О.С. Угольников

? Во время XXI Всероссийской олимпиады по астрономии, 9 апреля 2014 г. в 1 час по московскому времени, наступит противостояние Марса, а 15 апреля в 12 часов по московскому времени – полное лунное затмение. Какое угловое расстояние разделит Луну и Марс в момент полной фазы затмения (при наблюдении в той зоне Земли, где они будут видны)? Орбиты Земли, Луны и Марса считать круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. Суточный параллакс Луны не учитывать.

! Изобразим положения космических тел в оба указанных момента. Мы видим, что угловое расстояние между затмившейся Луной и Марсом есть сумма углов α и β . Угол α есть дуга, которую пройдет по орбите Земля в промежутке t между двумя явлениями:

$$\alpha = \omega_1 t = \frac{v_1}{l_1} t.$$

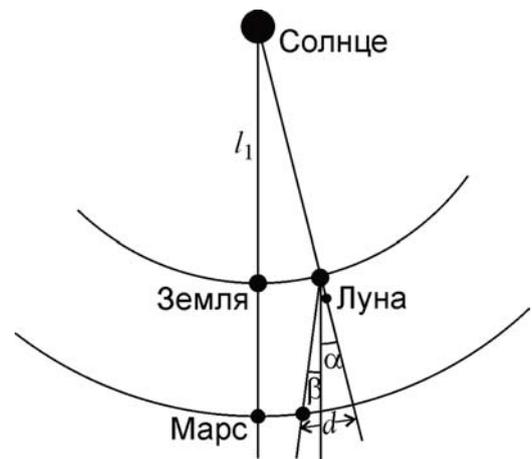
Здесь ω_1 и v_1 – угловая и линейная скорость Земли, l_1 – радиус ее орбиты. Угол β определяется попятным перемещением Марса среди звезд вблизи противостояния и равен

$$\beta = \frac{v_1 - v_2}{l_2 - l_1} t.$$

Здесь аналогичные обозначения с индексом 2 введены для Марса. Угловое расстояние между Луной и Марсом в момент затмения составит:

$$\gamma = \alpha + \beta = \left(\frac{v_1}{l_1} + \frac{v_1 - v_2}{l_2 - l_1} \right) t = \left(\frac{v_1}{l_1} + \frac{v_1(1 - a^{-1/2})}{l_1(a - 1)} \right) t = \omega_1 t \left(1 + \frac{1}{a + \sqrt{a}} \right).$$

Здесь a – отношение радиусов орбит Марса и Земли (или радиус орбиты Марса в астрономических единицах). Подставляя численные данные, получаем величину углового расстояния: 8.7° .



Х. 3 ХРУСТАЛЬНАЯ СФЕРА

О.С. Угольников

? В древности люди считали, что наш мир, содержащий Солнце, Землю и другие планеты, окружен хрустальной сферой, на которой располагаются звезды. Предположим, что вокруг Солнечной системы действительно есть сфера, причем совершенно прозрачная. На ней закреплены 6000 звезд со средней яркостью, соответствующей 4.8 звездной величине в небе Земли. Звезды светят равномерно во все стороны. Каков радиус этой сферы, если при наблюдении издалека она имеет такой же суммарный блеск, как и находящееся внутри нее Солнце?

! Коль скоро сфера издалека выглядит такой же по блеску, как и Солнце, ее суммарная абсолютная величина M_0 такая же, как и у Солнца: 4.7^m . Суммарная видимая звездная величина сферы на Земле равна

$$m_0 = m - 2.5 \lg N = -4.6.$$

Здесь m – звездная величина, соответствующая средней яркости звезды, N – количество звезд. Все звезды сферы находятся от Земли практически на одинаковом расстоянии, равном радиусу сферы R . Найдём его:

$$\lg R = 1 + \frac{m_0 - M_0}{5}.$$

Радиус сферы равен 0.14 пк.

X. 4 В ПОГОНЕ ЗА ЗВЕЗДАМИ

Е.Н. Фадеев

? Пилот самолета, движущегося со скоростью 800 км/ч, заметил, что альт-азимутальные координаты звезд остаются одинаковыми в течение всего полета длительностью в 6 часов. Определите, на сколько километров меньше пришлось бы преодолеть пилоту, если бы он летел кратчайшим маршрутом?

! Альт-азимутальные координаты звезд меняются из-за суточного вращения Земли. Значит, самолет должен лететь так, чтобы его движение компенсировало это вращение. Линейная скорость суточного вращения Земли на широте φ равна

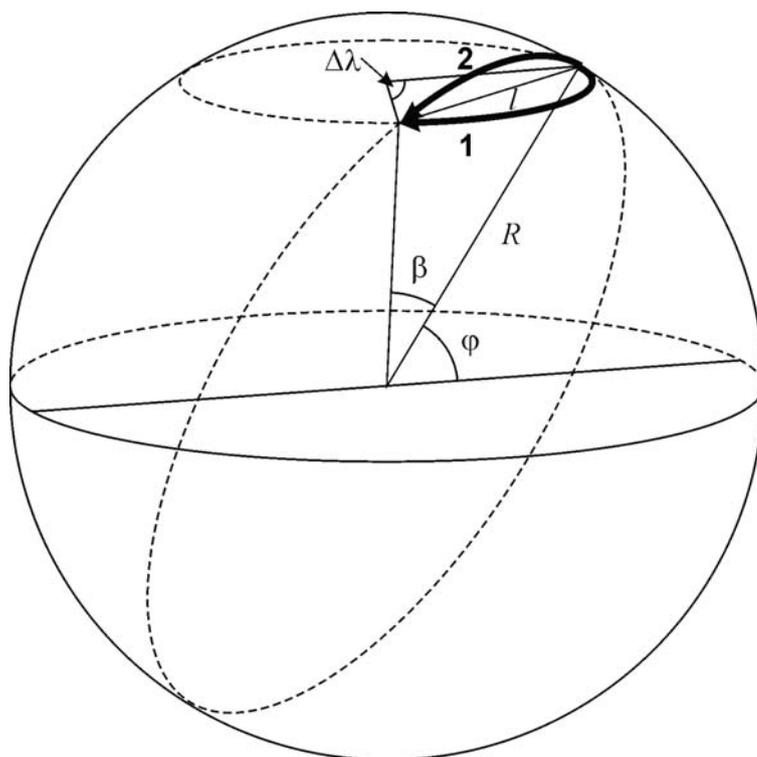
$$v = \frac{2\pi}{T} R \cos\varphi.$$

Эта скорость составляет 800 км/ч на широте 61° (в северном или южном полушарии). За 6 часов самолет преодолевает 4800 км по траектории 1 на рисунке, что соответствует разнице долгот $\Delta\lambda$ около 90° .

Ему пришлось бы преодолеть меньшее расстояние, если бы он летел вдоль дуги большого круга (траектория 2). Обозначим эту дугу как β . Расстояние между точкой старта и точкой финиша по прямой составляет

$$l = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2R \cos\varphi \sin \frac{\Delta\lambda}{2} = \sqrt{2} R \cos\varphi.$$

Отсюда получаем, что длина дуги большого круга β равна 40° , а соответствующее линейное расстояние равно 4400 км. В результате, пилот увеличил длину своего пути на 400 км.



X. 6**РАСПАД СКОПЛЕНИЯ**

О.С. Угольников

? Небольшое рассеянное звездное скопление состоит из 100 одинаковых звезд, не группирующихся в пары, и имеет радиус 1 пк. Через какое-то время скопление распадается, две его звезды образуют двойную систему, а остальные покидают область скопления по отдельности. Оцените расстояние между звездами в двойной системе. Начальные скорости звезд и их скорости после вылета из скопления считать малыми.

! Мы пренебрегаем начальными скоростями звезд скопления, поэтому можно сразу сказать, что оно гравитационно связано, его полная энергия отрицательна. В некоторый момент времени его покидает одна из звезд. Для этого ей необходимо выйти из «потенциальной ямы» с энергией

$$E_1 = -\frac{G(N-1)M^2}{R}.$$

Здесь N – число звезд в скоплении, M – масса одной звезды, R – характерное расстояние между звездами, которое можно считать равным радиусу скопления. Данная энергия есть потенциальная энергия взаимодействия покидающей скопление звезды с $(N-1)$ другими звездами. Следующей звезде будет немного проще покинуть скопление, в выражение для энергии E_2 будет стоять множитель $(N-2)$. Здесь мы не учитываем возможное уменьшение размеров скопления после вылета звезд, так как оно будет энергетически компенсировано появлением у оставшихся звезд кинетической энергии. В итоге, чтобы скопление покинули все звезды, кроме двух, нужна энергия

$$E = \sum_{i=1}^{N-2} E_i = -\frac{GM^2}{R} \sum_{i=1}^{N-2} (N-i) \approx -\frac{GM^2 N^2}{2R}.$$

Здесь мы учли, что число N достаточно велико. То же выражение можно было получить, просто просуммировав величины потенциальной энергии попарного взаимодействия звезд, считая расстояния между ними равными R . Дополнительной кинетической энергией, уносимой вылетающими звездами, мы по условию задачи пренебрегаем. Следовательно, именно такая отрицательная энергия E должна характеризовать единственную двойную систему, оставшуюся на месте скопления. Мы вновь пренебрегли изначальными потенциальными энергиями двух звезд как много меньшими по модулю, чем энергия E .

Предположим, что орбиты звезд в двойной системе круговые. Тогда полная энергия есть половина потенциальной энергии системы. Отсюда получаем выражение для потенциальной энергии:

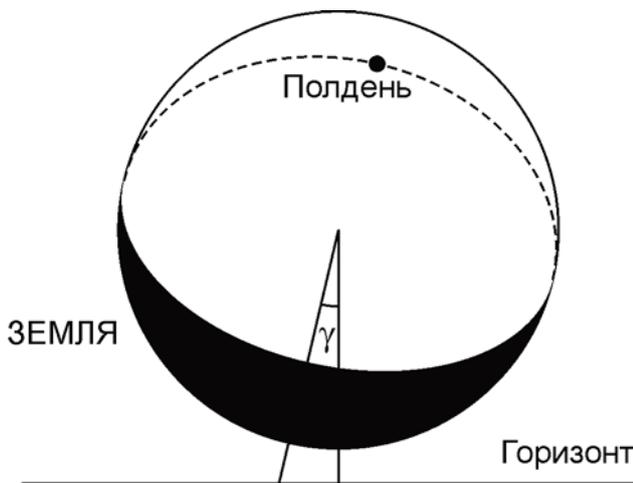
$$E_p = -\frac{GM^2}{r} = 2E = -\frac{GM^2 N^2}{R}.$$

Расстояние между звездами составит

$$r = \frac{R}{N^2} = 20 \text{ а.е.}$$

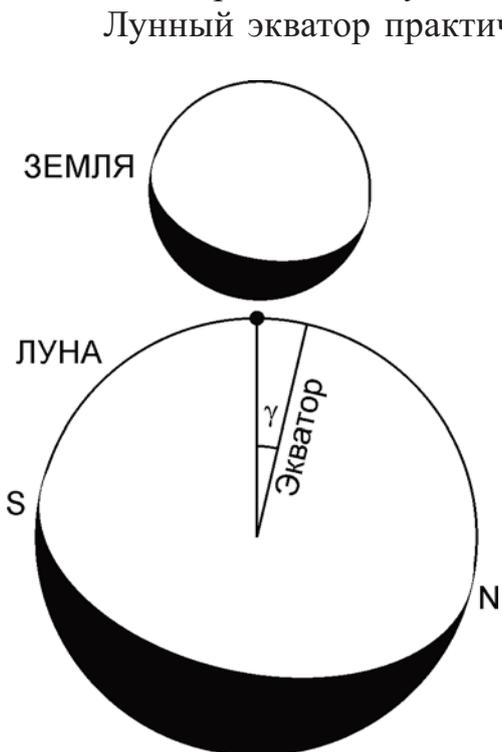
По фотографии мы можем определить фазу Земли (около 0.8), а также угол γ , определяющий положение оси терминатора по отношению к лунному горизонту (см. рисунок ниже), он равен 13° .

К Луне повернуто дневное и вечернее полушарие Земли. По рисунку мы можем приблизительно определить точку на Земле, в которой Солнце расположено в зените. Очевидно, в ней в этот момент полдень. На фотографии видны материки на Земле, и указанная точка попадает на западное экваториальное побережье Африки. Ее

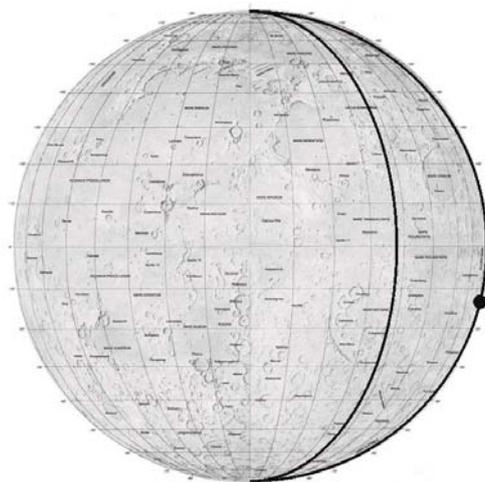
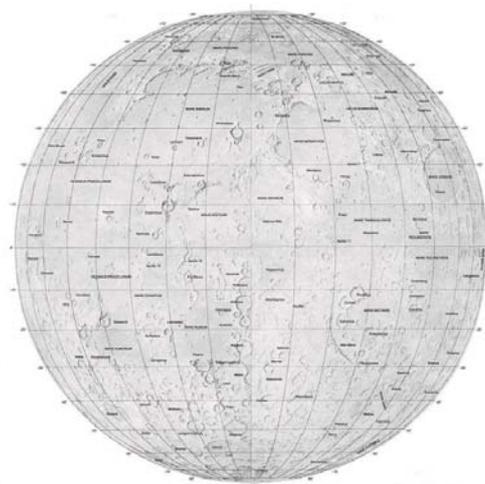


географическая долгота около 0 (точнее, 10° в.д.). Поэтому можно сделать вывод, что фотография сделана около 12 часов по всемирному времени (точнее, $11^{\text{ч}}20^{\text{м}}$). Для того, чтобы ответить на другие вопросы, изобразим картину в той же проекции, но мысленно удалившись назад от Луны (ниже слева).

Так как Солнце находится от точки наблюдения намного дальше и Земли, и Луны, фазы обеих тел будут одинаковы (0.8). На рисунок попадает все обратное полушарие Луны, Земля находится позади нее. Фаза Луны при наблюдении с Земли составит 0.2. Это будет растущая Луна, так как она видна с вечернего полушария Земли. Фото сделано над освещенной поверхностью Луны, где Солнце располагается над горизонтом.



Лунный экватор практически не наклонен к плоскости орбиты Луны, и точки пересечения лимба и терминатора – это полюса Луны. Полюс слева – южный, так как с этой же стороны у Земли видно южное полушарие. Точка съемки также показана на рисунке, она располагается в 13° южнее экватора. Долгота ее близка к $+90^\circ$ (так как лунными либрациями мы пренебрегаем). С Земли эта точка будет видна на правом краю растущего серпа Луны:





X. 2

ЗВЕЗДНАЯ ФОТОМЕТРИЯ

А.М. Татарников

? В таблице приведена выписка из реального журнала наблюдений с UVV-фотометром на базе ФЭУ (фотоэлектронного умножителя), работающего в режиме счета фотонов. Наблюдения с ним выполняются по следующей схеме: стандарт – фон неба – переменная звезда – фон неба – стандарт и т.д. Время счета фотонов в каждом случае составляет 10 секунд, для каждого из объектов делается несколько экспозиций. Темновой ток (сигнал от неосвещенного ФЭУ) при этом не записывается, так как он входит в сигнал во всех случаях и при вычислении звездной величины переменной звезды автоматически учитывается. Измерения разных звезд и фона могут проводиться с разными диафрагмами (диаметром 27 или 13 угловых секунд), расположенными в фокальной плоскости. Определите звездную величину переменной звезды, поверхностную яркость фона неба в фильтрах В и V (в звездных величинах с 1 кв. угл. сек), если звездные величины стандарта «с» равны $m_{CB}=9.63$, $m_{CV}=8.18$. Оцените ошибку полученных значений.

Объект	Диафрагма	В	V
Стандарт «с»	27"	17000	22030
		17060	22040
		16980	21840
Фон	27"	225	183
		233	171
Переменная V1027 Cyg	13"	4317	11460
		4303	11590
		4256	11260
Фон	13"	79	69
		82	71
		81	65
		79	70
			71
			69
Стандарт «с»	27"	16930	22090
		16880	22100
		17050	21900
Фон	27"	228	179

! Для вычисления яркости фона неба необходимо определить темновой ток ФЭУ во время наблюдений. Наблюдатель его не записывает, т.к. темновой ток одинаково входит в сигнал от фона и от звезды. При обработке необходимо вычесть из сигнала, полученного при измерении звезды, сигнал от фона неба. Соответственно, темновой ток при этом автоматически учитывается.

Отсчеты от неба в одном фильтре должны быть пропорциональны площади используемой диафрагмы, а отношение отсчетов от неба в разных фильтрах не должно зависеть от размера диафрагмы. Сравнивая отсчеты от фона неба, полученные при наблюдениях переменной звезды V1027 Cyg и ее стандарта «с», можно заметить, что оба условия при этом не выполняются. Это сказывается влияние неучтенного темнового тока. В общем виде сигнал от ФЭУ составляет

$$N = J + FS + D,$$

где J – сигнал от звезды (измеряемой переменной звезды или стандарта), F – сигнал от одной квадратной секунды фона неба, S – площадь неба, ограниченная диафрагмой, D – темновой ток. В пределах небольшой области неба (звезда, стандарт и участок фона неба выбираются рядом друг с другом) при хороших погодных условиях сигнал F зависит только от цвета, а темновой ток D является постоянной величиной.

Измерения стандарта и фона неба, проведенные с диафрагмой 27" дважды, показывают, что эти параметры особо не изменились между двумя сессиями измерений, и погодные условия действительно были стабильными. В этом случае мы можем просто вычислить средние значения сигнала от стандарта и фона. Рассчитаем также средние значения при измерениях переменной звезды и фона при диафрагме 13":

Объект	Диафрагма	В	V
Стандарт «с»	27"	16980 ± 60	22000 ± 100
Фон	27"	229 ± 3	178 ± 5
Переменная V1027 Cyg	13"	4290 ± 30	11440 ± 140
Фон	13"	80 ± 1	69 ± 2

Для измерений фона $J=0$, измерения с двумя диафрагмами дают нам систему уравнений:

$$\begin{aligned} N_1 &= FS_1 + D; \\ N_2 &= FS_2 + D. \end{aligned}$$

Решая ее, мы получаем величины фона с одной квадратной секунды и темнового тока:

$$F = \frac{N_2 - N_1}{S_2 - S_1}; \quad D = \frac{N_1 S_2 - N_2 S_1}{S_2 - S_1}.$$

Из таблицы видно, что величины темнового тока одинаковы для цветовых полос В и V, что подтверждает стабильность погодных условий и может также использоваться для проверки качества измерений и расчетов. Обратим внима-

Величина	В	V
S_1	132"²	
S_2	573"²	
F	0.338 ± 0.007	0.247 ± 0.011
D	35.4	36.4
J	4210 ± 30	11370 ± 140
J_c	16750 ± 60	21820 ± 100
m	11.13 ± 0.01	8.89 ± 0.01
m_F	21.37 ± 0.02	20.55 ± 0.04

Практический тур – 10 класс

ние, что измерения переменной звезды (J) и стандарта (J_C) делались при разных диафрагмах. Величины J и J_C получаются вычитанием фона, измеренного с соответствующей диафрагмой, и также приведены в таблице. Их точность соответствует точности измерения звезд, так как там ошибка по абсолютной величине значительно больше.

Зная звездную величину стандарта в обеих полосах, мы получаем звездную величину переменной звезды и одной квадратной секунды фона:

$$m = m_c - 2.5 \lg \frac{J}{J_c}; \quad m_F = m_c - 2.5 \lg \frac{F}{J_c}.$$

Ошибка в звездных величинах будет примерно равна сумме относительной погрешности измерения звезды (фона) и относительной погрешности измерения стандарта.